1) Δίνεται ένα γραμμικό σύστημα $Ax=b$

όπου

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1/4 & 2 & 2 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$ και b τυχόν

Να εξετάσετε τη σύγκλιση των επαναληπτικών μεθόδων Jacobi και Gauss-seidel.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Για να εξεταστεί η σύγκλιση των μεθόδων αυτών θα πρέπει σε κάθε περίπτωση να βρούμε τον πίνακα της κάθε μεθόδου και έπειτα νδο η φασματική ακτίνα του πίνακα. (δηλ $\rho(G)$) είναι μικρότερη του 1 δηλ $\rho(G)<1$. ($\Rightarrow$ θα έχουμε σύγκλιση)

<u>Jacobi</u>

<u>Ποιος ο πίνακας G της Jacobi; ($G_J=$;)</u>:

$G_J = M^{-1}\cdot N$ όπου M διαγώνιος πίνακας του A

$$M=D=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ και } N=-\begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1/4 & 0 & 2 \\ -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου τώρα:

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} I_3.$$

Επομένως,

$$G_J = M^{-1}\cdot N = \frac{1}{2} I_3 \cdot N = \frac{1}{2}\cdot N = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -4 & -8 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -2 \\ 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -\frac{1}{8} & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(G_J) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_\nu|\}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot I_3 - G_J) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 2 & 4 \\ \frac{1}{8} & \lambda & 1 \\ -1 & 4 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot (\lambda^2 - 4) - 2\left(\frac{1}{8}\lambda + 1\right) + 4\left(\frac{1}{2} + \lambda\right) =$$

$$= \lambda \cdot \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)$$

Επομένως, ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ και $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$

$\rho(G_J) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \frac{1}{2} < 1$ άρα η Jacobi συγκλίνει

Gauss-Seidel

Ποιος ο πίνακας της μεθόδου Gauss-Seidel; ($G_{GS} = ;$)

$G_{GS} = -(L+D)^{-1} \cdot U$ (όπου στην ουσία τον πίνακα A τον "σπάω" σε 3 πίνακες L, D και U)

$A = D + L + U$, Άρα, $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

και $U = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ καθώς $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$L + D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 2 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ Ψάχνοντας τον $(L+D)^{-1}$

ΓΕΝΙΚΑ: $A \cdot A^{-1} = I_3$ $\Rightarrow$ ΕΙΔΙΚΑ $(L+D)(L+D)^{-1} = I_3$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 2 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = -\frac{1}{16} \\ \varepsilon = \frac{1}{2} \\ \zeta = 0 \\ \eta = 3/4 \\ \theta = -2 \\ \iota = 1/2 \end{cases}$$

Άρα, $(L+D)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow -(L+D)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Άρα $G_{GS} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

Έπειτα, βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του G_{GS}

$$\det(\lambda I - G_{GS}) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 2 & 4 \\ 0 & \lambda-\frac{1}{4} & 1/2 \\ 0 & 3 & \lambda+2 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot \left((\lambda - \tfrac{1}{4})(\lambda+2) - \frac{3}{2} \right) = \lambda\left(\lambda^2 - \frac{7}{4}\lambda - 2\right) =$$

$$= \lambda \cdot (\lambda - 2{,}5)(\lambda - 0{,}79)$$

με $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \simeq 2{,}5$ και $\lambda_3 \simeq 0{,}79$.

$\rho(G_{GS}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = 2{,}5 > 1$ άρα η μέθοδος G-S αποκλίνει.